Matematika 9

Klíč správných řešení MPNS-042024K

1.

$\frac{9 \cdot \sqrt{5^2 - 4^2}}{\sqrt{9}} = \frac{9 \cdot \sqrt{25-16}}{3} = \frac{9 \cdot \sqrt{9}}{3} = \frac{9 \cdot 3}{3} = \frac{27}{3} = \mathbf{9}$

2.

2.1 Výpočet ceny dlažby

- Délka: 8 m
- Šířka: 4 m

Vypočítáme plochu podlahy: S = 8×4 = 32 m^2

Vypočítáme celkovou cenu: 32 × 300 = 9600 Kč

✅ **Cena za pokrytí podlahy novou dlažbou je 9 600 Kč.**

2.2 Zbytek vody v lahvi

- Celkový objem lahve: 3 l
- Upito: 1 l

Spočítáme zbytek vody: 3 − 1 = 2 l

Vyjádříme zlomek v základním tvaru: $\mathbf{\frac{2}{3}}$

✅ **V lahvi zbylo $\frac{2}{3}$ původního objemu.**

3.1

$\left[\left(\frac{20}{13} - \frac{1}{13} \cdot 7\right) : 8\right] \cdot 7 = \left[\left(\frac{20}{13} - \frac{7}{13}\right) : 8\right] \cdot 7 = (1:8) \cdot 7 = \frac{1}{8} \cdot 7 = \mathbf{\frac{7}{8}}$

3.2

$\frac{7-6}{9} \cdot \frac{27:3}{7:7} - \frac{28:4}{6+1} = \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{1} - \frac{7}{7} = 1 - 1 = \mathbf{0}$

4.1 Rozložení na součin podle vzorce

Daný výraz: $x^2 + 10x + 25$

Použijeme vzorec: $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b) \cdot (a+b)$

✅ **Výsledek:** $(\boldsymbol{x} + \mathbf{5}) \cdot (\boldsymbol{x} + \mathbf{5}) = (\boldsymbol{x} + \mathbf{5})^{\mathbf{2}}$

4.2 Umocnění a zjednodušení

$(7+y)\ \cdot(3y-3)+(y+9)\cdot(y-13)=3y^2-3y+21y-21+y^2-13y+9y-117=\mathbf{4y^2+14y-138}$

4.3 Zjednodušení výrazu

$\frac{(z+3)\cdot(2+3)}{z+3}-(z-3)=\frac{(z+3)\cdot 5}{z+3}-(z-3)=5-z+3=\mathbf{8-z}$

5.1

$$0{,}5x-0{,}7+5{,}6x:7=2{,}6x:2-0{,}7$$

$$0{,}5x-0{,}7+0{,}8x=1{,}3x-0{,}7$$

$$1{,}3x-0{,}7=1{,}3x-0{,}7$$

$$\mathbf{0=0}\quad\rightarrow\quad \boldsymbol{má\ nekonečně\ mnoho\ řešení}$$

5.2

$$\frac{3x-9}{2}-\frac{3+x}{7}=\frac{5-x}{14}+\frac{9+3}{3}$$

$$\frac{3x-9}{2}-\frac{3+x}{7}=\frac{5-x}{14}+\frac{12}{3}$$

$$\frac{21x-63}{14}-\frac{6+2x}{14}=\frac{5-x}{14}+4$$

$$\frac{20x-74}{14}=4$$

$$\frac{10x-37}{7}=4$$

$$10x-37=28$$

$$10x=65$$

$$\boldsymbol{x=6{,}5=\frac{13}{2}}$$

6.

6.1 Výpočet povrchu krabice

Krabice má tvar kvádru s rozměry:

- délka = 30 cm
- šířka = 20 cm
- výška = 15 cm

Vzorec pro výpočet povrchu kvádru: $P\ =\ 2\ \cdot\ (\ a\ \cdot\ b\ +\ a\ \cdot\ c\ +\ b\ \cdot\ c\ )$

Dosadíme: $P\ =\ 2\cdot(30\cdot 20+30\cdot 15+20\cdot 15)=2\cdot(\ 600+450+300)=2\cdot 1350=\boldsymbol{2700cm^2}$

✅ **Povrch krabice je 2700 cm^2**

6.2 Výpočet obsahu nevyužité části papíru
Pavel vystřihl síť krabice z obdélníkového papíru. Rozměry tohoto papíru jsou:

- Šířka papíru = (15 + 15 + 20) = 50 cm
- Výška papíru = (15 + 30 + 15 + 30) = 90 cm

Celkový obsah papíru: S = 90 ·50 =4 500 cm^2

Nevyužitá část papíru: S = 4500 – 2700 = **1 800 cm^2**

✅ **Obsah nevyužité části papíru je 1 800 cm^2**

7.
1. Čas, kdy dorazí na místo setkání
Rudolf

- Trasa: 6 km
- Rychlost: 8 km/h
- Čas: $t = \frac{6}{8}$ = 0,75 hodiny = 45 minut
- Rudolf dorazí v 7:45.

Jirka

- Trasa: 7 km
- Rychlost: 10 km/h
- Čas: $t = \frac{7}{10}$ = = 0,7 hodiny = 42 minut
- Jirka dorazí v 7:42.

2. Čas čekání
Rudolf dorazí v 7:45, Jirka v 7:42, takže Jirka čeká: 7:45 − 7:42 = 3 minuty
3. Čas, kdy doběhnou do školy

- Společně běží poslední 4 km rychlostí 8 km/h (rychlost pomalejšího).
- Čas $t = \frac{4}{8}$ = 0,5 hodiny = 30 minut
- Vyrazili v 7:45, takže doběhnou do školy v 7:45 + 30 minut = 8:15

Odpovědi:
✅ **Čas čekání: 3 minuty**
✅ **Čas příchodu do školy: 8:15**

8.
8.1 Obsah útvaru složeného z pěti dlaždiček každého druhu

Obsah kruhové dlaždice: $S = \pi r^2 = \pi 10^2 = 100\pi = 314\ dm^2$

Obsah čtvercové dlaždice: $s = a^2 - \frac{1}{4} s_1 = 20^2 - 314 = 400 - 314 = 86\ cm^2$

Obsah z 5 dlaždic každého druhu: $10 \cdot 314 + 10 \cdot 86 = 3\,140 + 860 = \mathbf{4\,000\ cm^2}$

✅ **Celkový obsah dvou dlaždiček od každého druhu je 4 000 cm².**

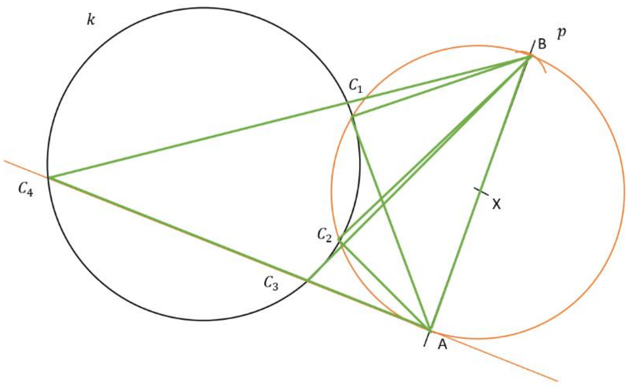
8.2 Počet dlaždic na vydláždění pozemku

$16\ m^2 = 160\,000\ cm^2 \rightarrow 160\,000 cm^2 : 400\ cm^2 = 400\ plných\ čtverců\ \rightarrow \mathbf{800\ dlaždiček}$

✅ **Petr musí použít 800 dlaždic, tedy 400 čtvercových a 400 kruhových dlaždic.**

9.

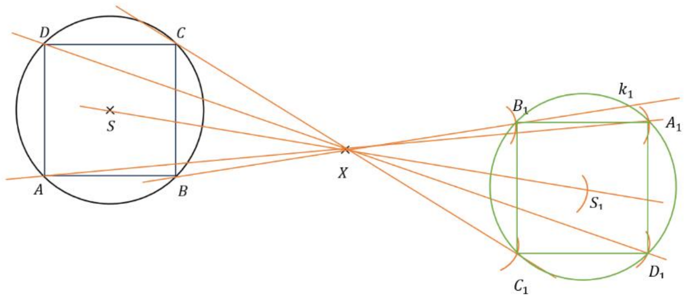
Popis:



- Narýsujeme bod B, tak že vezmeme do kružítka vzdálenost AX, a pak kružítko zapíchneme do bodu X. Tam, kde se mi protne s přímko p, je bod B.
- Sestrojíme Thaletovu kružnici z bodu X o poloměru AX. Kde se nám kružnice protne s kružnicí k jsou body C. Tím nám vyjdou dvě řešení.
- Narýsujeme kolmici z bodu A, kde se nám protne s kružnicí k jsou bod C. Tím nám vyjdou dvě řešení.
- Narýsujeme trojúhelníky ABC.
- Příklad má čtyři řešení.

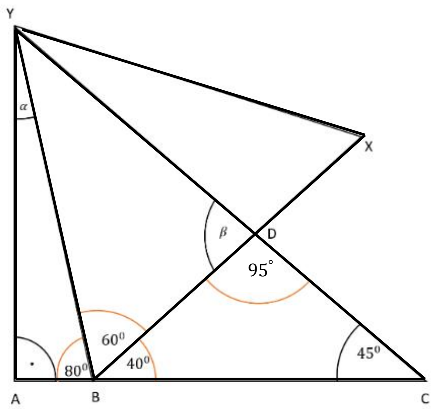
10.

Popis:



- Všechny body postupně přeneseme pomocí středové souměrnosti. Tak že z bodu natáhneme přes bod X přímku.
- Na závěr narýsujeme kružnici.
- Výsledný obraz by měl vypadat totožně.

11.



- Je nutno si uvědomit, že vnitřní úhly v rovnostranném trojúhelníku měří 60°. Úhly vedlejší se musí rovnat 180°.
- Poté postupně dopočítáme všechny úhly.
- Úhel β měří **85° = C**.

12.

1. Určení počtu jednotlivých toastů

Máme dané poměry:

- Pizza toast: Sírový toast = 4:3
- Sírový toast: Zapečený toast = 3:4

Označíme:

- Počet sírových toastů jako 3x.
- Počet pizza toastů pak bude 4x.
- Počet zapečených toastů bude 4x.
- Počet premium toastů je známý: 22.

Celkový počet toastů:

$$4x + 3x + 4x + 22 = 55$$

$$11x + 22 = 55$$

$$11x = 33$$

$$x = 3$$

Dosadíme:

- Sírové toast: $3x = 9$
- Pizza toast: $4x = 12$
- Zapečený toast: $4x = 12$
- Premium toast: *22 (dáno)*

2. Výpočet celkových tržeb

Celková cena za jednotlivé toasty:

$(12 \times 30) + (9 \times 25) + (12 \times 30) + (22 \times 35) = 360 + 225 + 360 + 770 = \mathbf{1715\ Kč}$

✅ **Odpověď: B) 1 715 Kč.**

13.

1. Výška rovnoramenného trojúhelníka

Výšku trojúhelníka určíme pomocí Pythagorovy věty. Trojúhelník rozdělíme na dva pravoúhlé trojúhelníky s odvěsnami:

- polovina základny: $\frac{18}{2} = 9\ cm$
- přepona (rameno): *15 cm*

$$v = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{144} = 12\ cm$$

2. Obsah podstavy (čtverec + čtyři trojúhelníky)

- Obsah čtverce: $18^2 = 324\ cm^2$
- Obsah jednoho trojúhelníka: $9 \cdot 12 = 108\ cm^2$

Celkový obsah podstavy: 324 + 4 × 108 = 324 + 432 =756 cm^2

3. Objem hranolu

Výška hranolu je $h = \frac{2}{3}x = \frac{2}{3}x \times 15 = 10\ cm$

$V = 756 \times 10 =$ ***7 560*** $\boldsymbol{cm^3}$

✅ **Správná odpověď je E) jiný objem** (protože žádná jiná možnost přesně neodpovídá).

14.

14.1 Obsah pozemku je 3,63 aru.

- Pozemek je čtverec o straně 19 metrů.
- Obsah čtverce: $S = 19^2 = 361 m^2$
- 1 ar = 100 m^2, takže v arech: 361 : 100 = **3,61 aru**

❌ **Tvrzení je nepravdivé (N).**

14.2 Úhlopříčka pozemku měří 45 cm.

- 45 m je nesmyslně velké. Nedává smysl, protože musí platit trojúhelníkové pravidlo, tedy součet délek dvou stran musí být větší než délka třetí strany.

❌ **Tvrzení je nepravdivé (N).**

14.3 Na mapě s měřítkem 1:100 je zobrazen pozemek obsahem 36,1 $\boldsymbol{cm^2}$.

- Měřítko 1:100 znamená, že 1 cm na mapě odpovídá 100 cm = 1 m ve skutečnosti.
- Skutečná plocha pozemku: 361 m^2.
- Jaká bude plocha na mapě?
  - Každá délka se zmenší 100×, takže obsah se zmenší $(100)^2$ = 10 000krát.
  - Obsah v cm^2: $\frac{3\,610\,000}{10\,000} = \frac{361}{1} \approx \boldsymbol{361\ cm^2}$

❌ **Tvrzení je nepravdivé (N).**

15.

15.1

Objem vany je 2 hl, což je 200 litrů. Poměr teplé a studené vody je 3:2. Celkový objem je rozdělen takto:

- Teplá voda: $\frac{3}{3+2} \cdot 200 = \frac{3}{5} \cdot 200 = 120\ litrů$

- Studená voda: $\frac{2}{5} \cdot 200 = 80\ litrů$

✅ **Správná odpověď: 120 (B)**

15.2

Máme čtvercový pozemek se stranou 19 m, jeho obsah je: *S = 19 × 19 = 361* m^2

Obvod obdélníkového pozemku je o 4 m kratší než obvod čtvercového, který je: *O = 4 × 19 = 76 m*

Obvod obdélníku je tedy 72 m. Délka jedné strany je 19 m, označme druhou stranu x:

$$2\,(19 + x) = 72$$

$$19 + x = 36$$

$$x = 17$$

Obsah obdélníkového pozemku: *S = 19 × 17 = 323* m^2

Rozdíl obsahů: *361 – 323 =* ***38*** $\boldsymbol{m^2}$

✅ **Správná odpověď: 38 (A)**

15.3

Nejmenší dvouciferná prvočísla jsou 11 a 13. Nejmenší společný násobek (NSN) je jejich součin: *11 × 13 =* ***143***

✅ **Správná odpověď: 143 (C)**

16.

Na začátku je vhodné sestavit tabulku prvních patnácti přiložení, ze které lze odvodit obecný vzorec. Věž se skládá z pater, přičemž každé další patro obsahuje o jednu kostku více než patro předchozí. Při každém přiložení tedy přidáváme o jednu kostku více než při předchozím přiložení.

16.1 Počet kostek po 11 přiloženích

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = \mathbf{66}$$

✅ **Odpověď: Po 11 přiloženích bude věž obsahovat 66 kostek.**

16.2 Počet pater věže složené z 120 kostek

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 = \mathbf{120}$$

✅ **Odpověď: Věž složená z 120 kostek bude mít 15 pater.**