

1.

Zadané informace:

- Lahev má 1,5 litrů 1 500 ml.
- Každá sousedka upije o 100 ml více než ta před ní.
- Začínali od 100 ml a střídali se.

Vypočítáme jednotlivá napití:

1. První sousedka: upije 100 ml → zbývá 1 400 ml
2. Druhá sousedka: upije 200 ml → zbývá 1 200 ml
3. První sousedka: upije 300 ml → zbývá 900 ml
4. Druhá sousedka: upije 400 ml → zbývá 500 ml
5. První sousedka: upije 500 ml → zbývá 0 ml

Odpověď: 500 ml

2.

2.1 Dvojciferné číslo, které je dělitelné číslem 7 a součet jeho cifer je 6

Nejprve si vypíšeme čísla, kterých součet cifer je 6:

- 60 (součet cifer: $6 + 0 = 6$)
- 51 (součet cifer: $5 + 1 = 6$)
- 15 (součet cifer: $1 + 5 = 6$)
- 42 (součet cifer: $4 + 2 = 6$) – Jediné je dělitelné sedmi.
- 24 (součet cifer: $2 + 4 = 6$)
- 33 (součet cifer: $3 + 3 = 6$)

Odpověď: 42

2.2 Číslo, které je jednocifernou mocninou čísla 5 a není prvočíslem:

Nejprve si vypíšeme jednociferné mocniny čísla 5:

$5^1 = 5$ – Jedná se o prvočíslo.

$5^0 = 1$ – Nejedná se o prvočíslo.

Odpověď: 1

3.1

$$\left(\frac{\sqrt{81} : \sqrt{9}}{\sqrt{225} - \sqrt{169}} \right)^2 = \left(\frac{9 : 3}{15 - 13} \right)^2 = \left(\frac{3}{2} \right)^2 = \frac{9}{4}$$

3.2

$$\frac{\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{7} - \frac{1}{14} \cdot \frac{13}{3}}{\frac{22}{8} \cdot \frac{2}{21}} = \frac{\frac{4}{7} - \frac{13}{42}}{\frac{22}{84}} = \frac{\frac{11}{42}}{\frac{22}{84}} = \frac{11}{42} \cdot \frac{84}{22} = 1$$

4.1 Vytknutí 7 x

$$3xy + 35x - \frac{5}{2}x^2 = 7x \cdot \left(\frac{3y}{7} + 5 - \frac{5x}{14}\right)$$

4.2 Umocnění a zjednodušení

$$(4 - 7y)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = (16 - 56y + 49y^2) \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{49}{4}y^2 - 14y + 4$$

4.3 Zjednodušení výrazu

$$\begin{aligned} (13 - x)^2 - (19 - 17)^2 + (x - 3x + 5) \cdot (17 - 19 - 8x) \\ = 169 - 26x + x^2 - 4 + 4x + 16x^2 - 10 - 40x = 17x^2 - 10x + 155 \end{aligned}$$

5.1

$$\frac{3}{4} \cdot 2x + 15 \cdot (x - 5) = 8x - \frac{25}{2}$$

$$\frac{3}{2}x + 15x - 75 = 8x - \frac{25}{2}$$

$$3x + 30x - 150 = 16x - 25$$

$$33x - 150 = 16x - 25$$

$$17x = 125$$

$$x = \frac{125}{17}$$

5.2

$$\frac{5}{6} - (x - 2) - \frac{2}{5} \cdot (2x - 5) = 2 - \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{x}{2} - \frac{3}{2}\right)$$

$$25 - 30x + 60 - 12 \cdot (2x - 5) = 60 - 45 \cdot \left(\frac{x}{2} - \frac{3}{2}\right)$$

$$25 - 30x + 60 - 24x + 60 = 60 - \frac{45}{2}x + \frac{135}{2}$$

$$-54x + 85 = -\frac{45}{2}x + \frac{135}{2}$$

$$-108x + 170 = -45x + 135$$

$$-63x = -35$$

$$x = \frac{5}{9}$$

6.

6.1 Kolik ve firmě pracuje mužů?

Buď vypočítáme přes soustavu rovnic o dvou neznámých:

$$x + y = 900$$

$$\frac{1}{5}x + \frac{1}{20}y = 90$$

Nebo přes rovnici o jedné neznámé:

- Počet zaměstnanců celkem: 900
- Počet žen: x
- Počet mužů: $900 - x$

Známe, že 20 % žen a 5 % mužů šlo na akci. Celkem šlo na akci 10 % všech zaměstnanců, tedy:

$$0,2x + 0,05(900 - x) = 0,1 \times 900$$

Počet žen ve firmě je 300, takže počet mužů je: $900 - 300 = 600$

Ve firmě pracuje 600 mužů.

6.2 O kolik více/méně je na firemní akci žen než mužů?

Spočítáme počet žen a mužů na akci:

- Ženy na akci: $0,2 \times 300 = 60$
- Muži na akci: $0,05 \times 600 = 30$

Rozdíl: $60 - 30 = 30$

Na akci bylo o 30 více žen než mužů.

6.3 Poměr žen pracujících ve firmě a žen na firemní akci

Počet žen ve firmě: 300

Počet žen na akci: 60

Poměr: $300:60 = 5:1$

Poměr žen ve firmě k ženám na akci je 5:1.

7.

7.1 Výpočet délky úsečky $|AD|$

Máme rovnoramenný lichoběžník ABCD s délkami:

- $DC = 9$ cm (horní základna)
- $AB = 19$ cm (dolní základna)
- $XC = 15$ cm

Víme, že rovnoramenný lichoběžník má rovnoramenné strany, tedy $AD = BC$.

Pro výpočet délky XD použijeme pravoúhlý trojúhelník XCD .

Použijeme Pythagorovu větu v trojúhelníku XCD :

Dosadíme: $15^2 = |XD|^2 + 9^2$

$$XD = 12 \text{ cm}$$

Použijeme Pythagorovu větu v trojúhelníku AXD : $|AD|^2 = 5^2 + 12^2$

$$AD = 13 \text{ cm}$$

Délka úsečky $AD = 13$ cm.

7.2 Výpočet obsahu lichoběžníku ABCD

Vzorec pro obsah lichoběžníku: $S = \frac{(a+b) \cdot v}{2}$

Dosadíme:

$$S = \frac{(a+b) \cdot v}{2} = \frac{28 \cdot 12}{2} = 168 \text{ cm}^2$$

Obsah lichoběžníku ABCD je 168 cm^2 .

8.

8.1 Povrch pláště válce v závislosti na z:

Obsah pláště: $z \cdot v = 5z$

✓ **5 z**

8.2 Výpočet objemu válce:

Objem válce je: $V = S \cdot h = \pi \cdot 5 = 5\pi$

Číselně: $V = 15.7 \text{ cm}^3$

✓ **15.7 cm³**

9.

9.1 Sestrojení všech možných pravoúhlých trojúhelníků ABC

1. Určete vlastnosti trojúhelníku ABC:

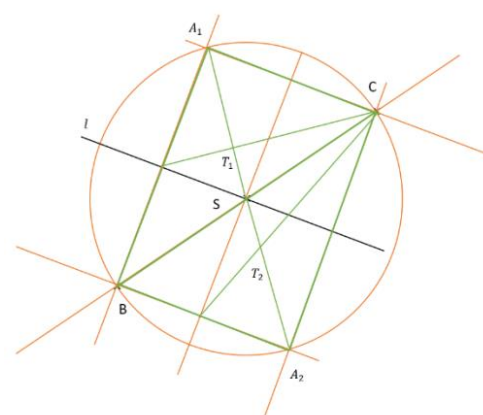
- Bod S je středem přepony BC, což znamená, že trojúhelník je pravoúhlý a přepona BC je dělena na dvě stejné části bodem S.
- Jedna z odvěsen je rovnoběžná s přímkou l, což omezuje možné orientace trojúhelníku.

2. Určete možná umístění bodů B a C:

- Protože bod S je středem úsečky BC, lze ho použít ke konstrukci bodů B a C jako bodů souměrných kolem S.
- Odvěsna, která je rovnoběžná s l, může být buď AB nebo AC.

3. Postup konstrukce:

- Nakreslete kružnici se středem v S a poloměrem SB (protože S je střed úsečky BC).
- Sestrojte body B a C tak, aby BC byla přepona a jedna odvěsna byla rovnoběžná s l.
- Pomocí Thaletovy kružnice získáte dvě možné orientace trojúhelníku podle toho, která odvěsna je rovnoběžná s l.



9.2 Sestrojení těžiště T každého trojúhelníku

1. Vlastnost těžiště:

- Těžiště T trojúhelníku dělí těžnice v poměru 2:1.

2. Postup konstrukce:

- Sestrojte těžnice trojúhelníku, tedy spojnice vrcholů se středy protilehlých stran.
- Průsečík těchto těžnic je hledané těžiště T.

✓ **Lze narýsovat dva různé pravoúhlé trojúhelníky ABC a ke každému jedno těžiště T.**

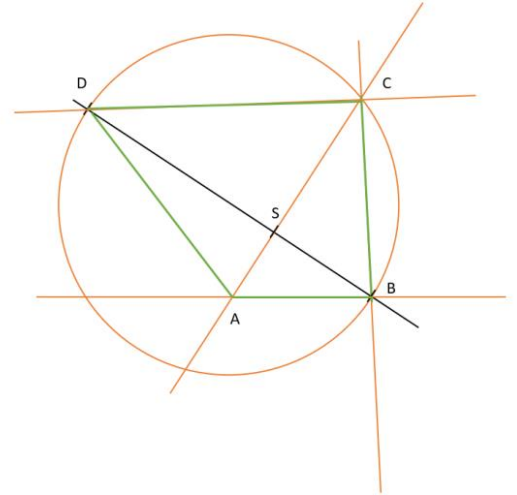
10.

1. Druh lichoběžníku

- Jedná se o pravoúhlý lichoběžník, což znamená, že jeden z jeho úhlů je pravý.
- Pravoúhlý úhel je u vrcholu C, tedy $\angle C = 90^\circ$.

2. Střed úhlopříčky

- Bod S je středem lichoběžníku a zároveň rozděluje úhlopříčku na části v poměru $|DS|:|SB|=2:1$.
- Úhlopříčky se protínají pod pravým úhlem.



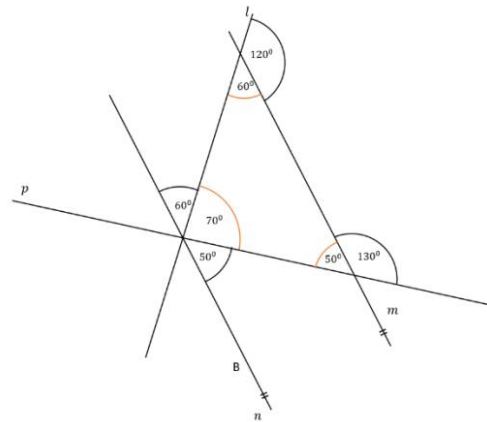
Postup konstrukce

1. Narýsujte bod B a Thaletovu kružnici k úsečce BD.
2. Umístěte bod C.
3. Sestrojte pravý úhel v bodě C.
 - Od bodu S narýsujte kolmici.
4. Použijte poměr rozdělení úhlopříčky k nalezení bodů A.

Lze narýsovat dva pravoúhlé lichoběžníky ABCD.

11.

- Je nutno si uvědomit, že vnitřní úhly vedlejší mají společně 180° a úhly protější mají stejnou velikost.
- Poté postupně dopočítáme všechny úhly.
- Úhel β měří 60°
- Úhel γ měří 50°



Úhel $\beta + \gamma$ měří 110° tedy E)

12.

Nechť z označuje počet pomerančů v koši.

Z poměrů uvedených v zadání vyjádříme počty ostatních druhů ovoce pomocí z :

- Počet hrušek: $y = \frac{5}{2}z$
- Počet jablek: $x = \frac{7}{4}z$

Dále využijeme podmínku, že jablek a hrušek je o 9 více než pomerančů: $x+y=z+9$

Dosadíme za x a y :

$$\frac{7}{4}z + \frac{5}{2}z = \frac{5}{2}z + z + 9$$

$$\frac{3}{4}z = 9$$

$$z = 12$$

Dopočítání počtu ovoce

- Pomeranče: $z=12$
- Hrušky: $y=30$
- Jablka: $x=21$

Výpočet ceny ovocného koše: $21 \times 10 + 30 \times 16 + 12 \times 15 = 210 + 480 + 180 = 870$

Správná odpověď je B) 870 Kč.

13.

Výpočet objemu:

- Celkový objem tělesa je 176 cm^3 .
- Počet kostek v tělese je 22.

Výpočet povrchu:

$$176 : 22 = 8 \text{ cm}^3$$

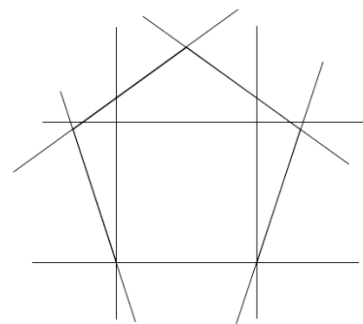
Jedna hrana krychle má tedy 2 cm : $\sqrt[3]{8} = 2 \text{ cm}^2$

Výpočet povrchu: $6 \cdot 2^2 = 24 \text{ cm}^2$

Správná odpověď je tedy: B) 24 cm^2

14.

1. Trojúhelník
 - Stačí 3 přímky, které se navzájem protínají a tvoří tři strany.
2. Čtverec
 - Potřebujeme další dvě přímky (svislé a vodorovné), které vytvoří čtverec.
3. Pravidelný pětiúhelník
 - Pro jeho vytvoření potřebujeme pět přímek, které se vhodně protínají.



Celkový minimální počet přímek, který umožní vytvořit všechny tři obrazce v jedné rovině, je 8 přímek.

Správná odpověď: A) z 8 přímek

15.

15.1 Třicet sekund se nerovná jedné třicetině minuty.

- 1 minuta = 60 sekund
- Jedna třicetina minuty: $60/30=2$ sekundy
- 30 sekund nejsou 2 sekundy, takže tvrzení je pravdivé (A).

Odpověď: A (pravdivé)

15.2 Půl hodiny se rovná jedné třista třicetišestině týdne.

- 1 týden = 7 dní = $7 \times 24 = 168$ hodin

- $1/336$ týdne: $168/336=0,5$ hodiny
- Tvrzení je tedy pravdivé (A).

✅ **Odpověď: A (pravdivé)**

15.3 360 hodin není rovno jednomu týdnu.

- 1 týden = 7 dní = 168 hodin

✅ **Odpověď: A (pravdivé)**

16.

16.1 Nádrž na vodu (cyklus odčerpání a doplnění)

- Objem nádrže: 500 l
- Každý den se odčerpá 20 %: $500 \times 0,2 = 100$ l
- Každý večer se doplní 50 l.
- První den: $500 - 100 + 50 = 450$ l
- Druhý den: $450 - 90 + 50 = 410$ l
- Třetí den: $410 - 82 + 50 = 378$ l

✅ **Odpověď: A) 378 l**

16.2 Výroba skleněných koulí

- Každý měsíc +10 % oproti předchozímu měsíci.
- První měsíc: 500 koulí
- Druhý měsíc: $500 \times 1,1 = 550$ koulí
- Třetí měsíc: $550 \times 1,1 = 605$ koulí
- Celkový počet koulí za tři měsíce: $500 + 550 + 605 = 1\,655$ koulí
- Objem jedné koule: $1000 \text{ cm}^3 = 1$ l
- Celkový objem skla: $1655 \times 1 = 1655$ l

✅ **Odpověď: B) 1655 l**

16.3 Cisterna (postupné odčerpávání 10 % za hodinu)

- Cisterna má 10 000 l, naplněna na 75 %: $10000 \times 0,75 = 7500$ l
- Každou hodinu odteče 10 % z aktuálního množství:
 - Po 1. hodině: $7500 - (7500 \times 0,1) = 6\,750$ l
 - Po 2. hodině: $6750 - (6750 \times 0,1) = 6\,075$ l

✅ **Odpověď: F) jiný počet litrů**