Matematika 9

Klíč správných řešení MPNS-052025K

1.

Máme dva zlomky: $\frac{3}{5}\ a\ \frac{3}{4}$

Chceme vypočítat součet a rozdíl, a poté jejich rozdíl.

1. Součet: $\frac{3}{5}+\frac{3}{4}$

Nejmenší společný jmenovatel je 20: $\frac{3}{5}+\frac{3}{4}=\frac{12}{20}+\frac{15}{20}=\frac{27}{20}$

2. Rozdíl: $\frac{3}{4}-\frac{3}{5}=\frac{15}{20}-\frac{12}{20}=\frac{3}{20}$

3. Rozdíl součtu a rozdílu: $\frac{27}{20}-\frac{3}{20}=\frac{24}{20}$

✅ **Odpověď: Rozdíl mezi součtem a rozdílem je $\frac{12}{10}$ nebo 1,2.**

2.

Václav jde přímou trasou z B do A, což je 14 km.

Jaroslav jde přes body C a D, takže jeho trasa se skládá ze tří částí:

1. BC = 8 km
2. CD = 8 km (protože CD je stejně dlouhé jako BC)
3. DA = 10 km – vypočítáme pomocí Pythagorovy věty

Celková délka Jaroslavovy trasy: BC+CD+DA=8+8+10=26 km

Rozdíl mezi trasami: 26−14=12 km

✅ **Odpověď: Jaroslavova trasa je o 12 km delší než Václavova.**

3.1 $\frac{\left(\frac{9}{8}-\frac{7}{4}\right):\frac{3}{4}}{\frac{7}{3}-7}-\frac{1}{7}=\frac{\left(\frac{9}{8}-\frac{14}{8}\right):\frac{3}{4}}{\frac{7}{3}-7}-\frac{1}{7}=\frac{-\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{3}}{\frac{7}{3}-7}-\frac{1}{7}=\frac{-\frac{5}{6}}{\frac{7}{3}-\frac{21}{3}}-\frac{1}{7}=-\frac{5}{6}\cdot-\frac{3}{14}-\frac{1}{7}=\frac{5}{28}-\frac{1}{7}=\frac{5}{28}-\frac{4}{28}=\frac{1}{28}$

3.2 $\left(\frac{31}{19}-\frac{30}{19}\cdot\frac{19}{19}\right):\frac{7}{19}:\frac{7}{19}=\left(\frac{31}{19}-\frac{30}{19}\right):\frac{7}{19}\cdot\frac{19}{7}=\frac{1}{19}$

4.1 Rozložení na součin podle vzorce

Použijeme vzorec rozdílu čtverců: $a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)$

$$400x^2-1{,}21=\mathbf{(20x+1{,}1)\cdot(20x-1{,}1)}$$

4.2 Umocnění a zjednodušení

$$\left[\left(\frac{4}{2}\right)^2 - \frac{a}{3^2}\right]^2 = \left(4 - \frac{a}{9}\right)^2 = \mathbf{16 - \frac{8}{9}a + \frac{a^2}{81}}$$

4.3 Zjednodušení výrazu

$$(x-9)^2 + 3x^2 - (x+5)^2 + (x+2)\cdot(x+8) + 9$$
$$= x^2 - 18x + 81 + 3x^2 - x^2 - 10x + 25 + x^2 + 10x + 16 + 9$$
$$= \mathbf{4x^2 - 18x + 131}$$

5.1

$$\sqrt{81}\cdot x - \sqrt{4}\cdot\sqrt{169} = 10x\cdot\sqrt{0{,}3\cdot 2{,}7} + \sqrt{16}$$

$$9x - 2\cdot 13 = 9x + 4$$

$$9x - 26 = 9x + 4$$

$$\mathbf{-26 = 4} \quad \rightarrow \boldsymbol{rovnice\ nem}\text{á ř}\boldsymbol{e}\text{š}\boldsymbol{en}\text{í}$$

5.2

$$\frac{7}{8}x - \frac{5}{8} + \frac{1}{4} : \frac{2}{13} = \frac{4}{5}x + \frac{7}{10}$$

$$\frac{7}{8}x - \frac{5}{8} + \frac{1}{4}\cdot\frac{13}{2} = \frac{4}{5}x + \frac{7}{10}$$

$$\frac{7}{8}x - \frac{5}{8} + \frac{13}{8} = \frac{4}{5}x + \frac{7}{10}$$

$$\frac{7}{8}x + \frac{8}{8} = \frac{4}{5}x + \frac{7}{10}$$

$$35x + 40 = 32x + 28$$

$$3x = -12$$

$$\boldsymbol{x = -4}$$

6.

6.1 Délka úsečky |AD|

Úsečka XD je výškou rovnoramenného lichoběžníku a lze ji vypočítat pomocí Pythagorovy věty v pravoúhlém trojúhelníku CDX:

$$|XC|^2 = |XD|^2 + |CD|^2$$
$$15^2 = |XD|^2 + 9^2$$
$$|XD| = 12\ cm$$

Použitím Pythagorovy věty v trojúhelníku AXD:

$$|AD|^2 = |AX|^2 + |XD|^2$$
$$|AD|^2 = 5^2 + 12^2$$
$$\boldsymbol{|AD| = 13\ cm}$$

✅ **Odpověď: $\boldsymbol{|AD| = 13\ cm}$**

6.2 Obsah lichoběžníku ABCD

Vzorec pro obsah lichoběžníku:

$$S = \frac{a+c}{2} \cdot v$$

Dosadíme:

$$S = \frac{19+9}{2} \cdot 12$$
$$S = 14 \cdot 12$$
$$\boldsymbol{S = 168cm^2}$$

✅ **Odpověď:** $\boldsymbol{S = 168cm^2}$

7.

Dané údaje:

- Před Karlem je 12 řad (dospělí).
- Za Karlem je polovina řad, co před ním → 6 řad (senioři).
- Karel sedí v jediné řadě (děti).
- Každá řada má 25 sedadel.

7.1 O kolik je více seniorů než dětí?

- Počet dětí: 1×25=25
- Počet seniorů: 6×25=150
- Rozdíl: 150−25=125

✅ **V kině je o 125 více seniorů než dětí.**

7.2 Poměr dospělých, dětí a seniorů

- Počet dospělých: 12×25=300
- Počet dětí: 25
- Počet seniorů: 150

Poměr dospělých, dětí a seniorů: 300:25:150

Zkrátíme největším společným dělitelem 300:25:150=12:1:6

✅ **Poměr dospělých, dětí a seniorů je 12:1:6.**

8.

Dané údaje:

- První sekačka poseká celou zahradu za 90 minut
- Druhá sekačka poseká celou zahradu za polovinu času první → 45 minut
- Třetí sekačka poseká celou zahradu za 60 minut

Část zahrady posekaná za 1 minutu:

- První sekačka: $\frac{1}{90}$
- Druhá sekačka: $\frac{1}{45}$
- Třetí sekačka: $\frac{1}{60}$

8.1 Část zahrady posekaná všemi sekačkami za 15 minutu

Součet výkonů všech tří sekaček: $\frac{1}{90} + \frac{1}{45} + \frac{1}{60}$

Najdeme společný jmenovatel (nejmenší společný násobek 90, 45 a 60 je 180): $\frac{2}{180} + \frac{4}{180} + \frac{3}{180} = \frac{1}{20}$

Za 1 minutu společně posekají 1/20 zahrady.

Za 15 minut posekají´: $\frac{1}{20} \cdot 15 = \frac{15}{20} = \mathbf{\frac{3}{4}}$

✅ **Za 15 minut všechny tři sekačky posekají $\frac{3}{4}$ zahrady.**

8.2 Rozdíl mezi první a druhou sekačkou za 9 minut

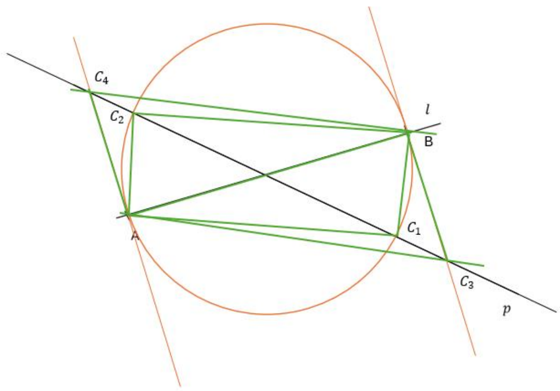
Část posekaná za 9 minut:

- První sekačka: $\frac{1}{90} \cdot 9 = \frac{1}{10}$
- Druhá sekačka: $\frac{1}{45} \cdot 9 = \frac{1}{5}$
- Rozdíl: $\frac{1}{10} - \frac{1}{5} = \frac{2}{10} - \frac{1}{10} = \mathbf{\frac{1}{10}}$

✅ **První sekačka poseká o $\mathbf{\frac{1}{10}}$ zahrady méně než druhá za 9 minut.**

9.

Popis

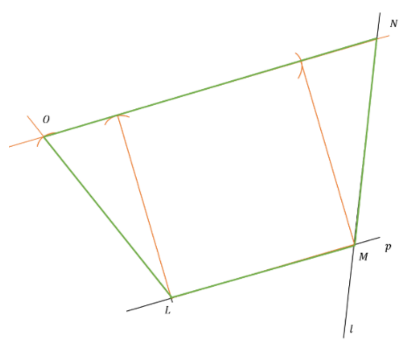


- Najdeme průsečík přímek p a l a označíme jej jako bod S.
- Tento bod bude klíčový, protože B má stejnou vzdálenost od S jako bod A.
- Sestrojíme kružnici se středem v bodě S a poloměrem SA, kde A je daný bod na přímce p.
- Tato kružnice protne přímku p ve dvou bodech, označíme je jako C_1 a C_2 a přímku l v jednom bodu, ten si označíme B.
- Narýsujeme kolmice k přímce l procházející body A a B, kde se nám tyto kolmice protnou s přímkou p máme body C_3 a C_4.
- Takto vzniknou čtyři trojúhelníky trojúhelník ABC.

✅ **Výsledkem jsou čtyři odlišné trojúhelníky ABC.**

10.

Popis



- Narýsujeme kolmici k přímce p procházející bodem M.
- Na této kolmici od bodu M odměříme vzdálenost rovnou délce úsečky LM a získáme polohu druhé základny. Zde si označíme bod.
- Z nového bodu uděláme rovnoběžku k přímce. Tam kde nám protne přímku l získáme bod N.
- Do kružítka si vezmeme vzdálenost MN a narýsujeme oblouk z bodu L. Tam, kde se nám protne s rovnoběžkou vznikne bod O.

✅ **Lichoběžník je nyní sestrojen.**

11.

1. Výpočet povrchu jednoho kvádru

Krychle A je rozdělena na 2 shodné kvádry s rozměry:

- základna x^2
- výška $\frac{x}{2}$

Povrch jednoho kvádru v krychli A: $P = 2(x \cdot x) + 4\left(x \cdot \frac{x}{2}\right) = 2x^2 + 2x^2 = 4x^2$

Krychle B je rozdělena na 4 shodné kvádry s rozměry:

- základna x^2
- výška $\frac{x}{4}$

Povrch jednoho kvádru v krychli B: $P = 2(x \cdot x) + 4\left(x \cdot \frac{x}{4}\right) = 2x^2 + x^2 = 3x^2$

2. Výpočet rozdílu povrchů kvádrů

Podle zadání platí: $P_A - P_B = 9\ dm^2$

Dosazením:
$$4x^2 - 3x^2 = 9$$
$$x^2 = 9$$
$$x = 3$$

3. Výpočet objemu krychle: $V = x^3 = 3^3 = \mathbf{27\ dm^3}$

Mezi nabízenými možnostmi není 27 dm^3, proto správná odpověď je:

✅ **E) Jiný objem**

12.

Nejprve spočítáme vzdálenost mezi Prahou a Kladnem.

1. Výpočet času cesty tam:
   - Rychlost tam: 15 km/h
   - Čas tam: $t_1 = d / 15$
2. Výpočet času cesty zpět:
   - Rychlost zpět: 10 km/h
   - Čas zpět: $t_2 = d / 10$
3. Celkový čas pohybu:
   - Karel vyjel v 10:00, vrátil se v 16:00.
   - Strávil 3 hodiny na Kladně, takže celková doba jízdy je 3 hodiny.
4. Řešíme rovnici pro celkový čas jízdy: $\frac{d}{15} + \frac{d}{10} = 3$
   - Společný jmenovatel: 30 $\frac{2d}{30} + \frac{3d}{30} = 3$

$$d = 18\ km$$

5. Průměrná rychlost bez zastávky:

   Celková ujetá vzdálenost: 36 km

   Celkový čas jízdy: 3 hodiny

$$v_{bez\ zastávky} = \frac{36}{3} = \mathbf{12\ km/h}$$

✅ **B) $\mathbf{12\ km/h}$**

13.

Pozorování na základě obrázku

Na obrázku je vidět, že 5 čar (kombinace vodorovných a svislých) rozděluje čtverec na 12 částí.

Obecný vzorec pro maximální počet částí

Pokud máme m svislých a n vodorovných čar, celkový počet částí se řídí vzorcem: *P (m , n) = (m + 1) × (n + 1)*

Tento vzorec vychází z toho, že každá svislá čára rozděluje čtverec na sloupce a každá vodorovná na řádky.

Použití vzorce pro 11 čar

Abychom maximalizovali počet částí, rozložíme čáry rovnoměrně na vodorovné a svislé.

Nejlepší způsob je mít přibližně stejný počet svislých a vodorovných čar.

- Pokud máme m = 5 svislých a n = 6 vodorovných, pak: *P (5 , 6) = (5 + 1) × (6+1) = 6 × 7 =* ***42***

✅ **A) 42 částí**.

14.

- Trojku dostalo 12 žáků → to odpovídá 40 %.
- Celkový počet žáků tedy spočítáme: 12/0,4=30

14.1 Jedničku dostalo o tři žáky více než dvojku.

- Známka 1: 20 % z 30 žáků → 30×0,2= 6 žáků
- Známka 2: 10 % z 30 žáků → 30×0,1= 3 žáci

✅ **Rozdíl je přesně 3 žáci → pravda (A)**

14.2 Dohromady je ve třídě 30 žáků.

✅ **Výpočet jsme si již ověřili → pravda (A)**

14.3 Třídní průměrná známka je 2,9.

Spočítáme vážený průměr:

Celkový součet známek: 6+6+36+24+15=87

Průměrná známka: 87/30=**2,9**

✅ **pravda (A)**

15.1 Změna ceny hodinek

1. Po prvnímroce: +20 % → 100 % × 1,2 = 120 %
2. Po druhém roce: +10 % → 120 % × 1,1 = 132 %
3. Po třetím roce: 132 % → 132 % × 0,5 = 66 %

Cena po třetím roce je 66 % ceny po prvním roce, což znamená, že je **o 34 % nižší** než cena po prvním roce.

✅ **Výsledek: C)**

15.2 Objem bazénu

Objem bazénu je 150 hl = $\frac{1}{3}$.
450 hl = 1
1 hl = 0,1 m^3, takže:

450 × 0,1 =**45** $\boldsymbol{m^3}$

✅ **Výsledek: A)**

15.3 Počet dětí s prvním jídlem

Nechť celkový počet dětí je x.

Podle zadání:

- 1. jídlo = (1/4) × x
- 2. jídlo = (5/9) × x
- 3. jídlo = (1/6) × x
- Odhlášeno = 10

Celkem: $\frac{1}{4}x + \frac{5}{9}x + \frac{1}{6}x + 10 = x$

Společný jmenovatel 4, 9 a 6 je 36: $\frac{35}{36}x + 10 = x$

$$x = \mathbf{360\ d\check{e}t\acute{i}}$$

✅ **Výsledek: F)**

16.

Určení délky cyklu

Z prvních 20 čísel lze vidět, že první část „1, 1, 2, 7“ se opakuje na 17. pozici, což naznačuje, že cyklus by mohl být 16 čísel dlouhý.

16.1 Jaký znak bude na 85. pozici?

Pokud je cyklus dlouhý 16 čísel, zjistíme dělením: *85 : 16 = 5 (zb.5)*

To znamená, že 85. pozice odpovídá 5. číslu v cyklu.

Podíváme se na 5. číslo v sekvenci: 1, 1, 2, 7, **9**

✅ **Odpověď:** 9

16.2 Na jaké pozici se po 28. objeví číslo 1?

Podíváme se, kolikrát se 1 vyskytuje v 16-členném cyklu.

Ze vzoru: 1, 1, 2, 7, 9, 3, 8, 5, 8, 1, 8, 3, 8, 4, 7, 6

Vidíme, že 1 se v cyklu objevuje třikrát (na pozicích 1, 2 a 10).

Počet cyklů potřebných k dosažení 28. výskytu: *28 ÷ 3 = 9 celých cyklů + zbytek 1*

Každých 16 čísel máme 3 výskyty čísla 1. Po 9 celých cyklech máme: *9 × 16 = 144 pozic*

To nám dává 27 výskytů. Potřebujeme ještě 1 další výskyt, což odpovídá pozicím 1 v dalším cyklu.

✅ **Odpověď: 145. pozice**

16.3 Poměr čísel 1 ku 8 když se po jedenácté objeví číslo 5?

Nejprve zjistíme, jak často se 5 objevuje v cyklu: Ze vzoru:

1, 1, 2, 7, 9, 3, 8, 5, 8, 1, 8, 3, 8, 4, 7, 6

Vidíme, že 5 se objevuje jednou v každém cyklu (na 8. místě).

Pokud 5 nastane po jedenácté, počet celých cyklů bude: 10 × 16 + 8 = *168. pozice*

Musíme zjistit poměr výskytů čísel 1 ku 8 v 10 ti cyklech.

Výskyt těchto čísel v jednom cyklu:

- 1 se objevuje 3× *3 ×10 = 30*
- 8 se objevuje 4× *4 × 10 = 40*

Počty v prvních 8 číslech nového cyklu:

Prvních 8 čísel nového cyklu: 1,1,2,7,9,3,8,5

- *1: 30 + 2 = 32*
- *8: 40 + 1 = 41*

Poměr: 32: 41

✅ **Odpověď: 32:41**